

## Matematica generale: compito del 9 gennaio 2013

Chi deve fare l'esame per meno di 9 CFU chiedi al docente prima di iniziare il compito.

Gli esercizi 1 e 2 vanno svolti *perfettamente* prima di passare agli altri.

In presenza di errori negli esercizi 1 e/o 2 il compito verrà considerato insufficiente.

1. Denotando con  $I(x_0, r)$  l'intorno sulla retta reale di centro  $x_0 \in \mathbb{R}$  e raggio  $r \geq 0$ , si considerino i seguenti 4 insiemi  $A, B, C, D$ .

$$A = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } 3 - 4x \leq 1\}, \quad B = \{1, 3\}, \quad C = \{n \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } -3 < n < 3\}, \quad D = I(0, 2).$$

- (a) Disegnare  $A \times B$  e  $C \times D$  nel piano cartesiano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .
- (b) Disegnare  $(A \times B) \cap (C \times D)$  nel piano cartesiano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .
- (c) Disegnare gli insiemi  $A \cup B$  e  $C \cap D$  sulla retta reale  $\mathbb{R}$ .

2. Risolvere la disequazione

$$\frac{x-1}{x-4} + \frac{2x-1}{3-x} \leq 0.$$

3. Data la funzione

$$f(x) = e^{-x^2-2x} - 1$$

determinarne

- (a) il dominio;
  - (b) il segno;
  - (c) gli eventuali asintoti;
  - (d) gli intervalli di crescita e decrescenza;
  - (e) eventuali punti di massimo e minimo, sia locali che globali;
  - (f) gli intervalli di convessità e concavità, e gli eventuali flessi;
  - (g) il grafico.
4. Calcolare l'area della regione di piano delimitata dall'asse delle  $x$  e dal grafico della funzione  $f(x) = e^{3x-1} - 1$ , in corrispondenza dell'intervallo  $(-1, 1)$ .
5. Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 x^2 \ln(x) dx.$$

6. Dire, giustificando la risposta, se le serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{3n} + 1}{7^n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 + n + 1}$$

convergono. Se sì, calcolarne la somma.

7. Sia  $A$  la matrice del sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \\ y + 2z = -1 \end{cases}$$

- (a) Calcolare  $\det A$ .
- (b) Risolvere il sistema con il metodo che si preferisce.
- (c) Dire se  $A$  è simmetrica.